INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

Investigação Operacional II - licenciatura MAEG – 2015/16

Data: 05/07/2016 ER Duração: 2 horas

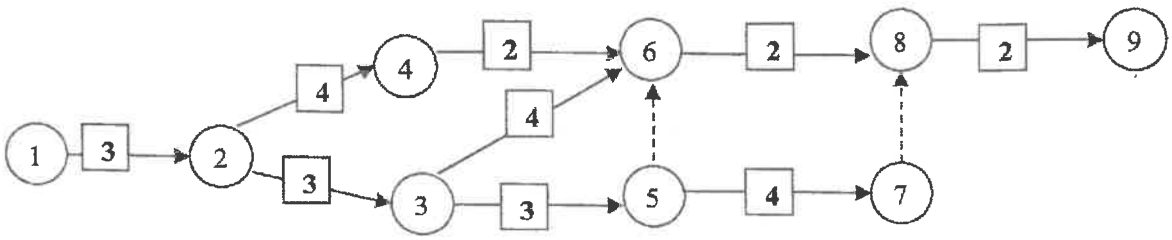
Nota: **Justifique todas as respostas.**

---

1. O suporte de um edifício pode ser concluído em quatro secções consecutivas, 1, 2, 3 e 4. Para cada secção é constituída por três actividades consecutivas: (1) escavação, (2) colocação das vigas de aço e (3) colocação do cimento (betão), que têm de ser realizadas por esta ordem. A escavação de uma secção só pode ser iniciada depois de terminada a da secção anterior. As vigas de aço de cada secção são postas depois da escavação da respectiva secção e das vigas da secção precedente, o mesmo acontecendo com a colocação do cimento.

   a) ***(2,5 valores)*** *Desenhe a rede do projecto;*

   b) ***(1,5 valores)*** *Para cada secção, as escavações duram 15 dias, a colocação das vigas de aço 20 dias e a colocação do cimento 10 dias. Determine o caminho crítico e as margens das actividades. Se não resolveu a alínea anterior considere a seguinte rede com as durações indicadas no* □*:*



   c) ***(1,5 valores)*** *Considerando que as durações das actividades são variáveis aleatórias cujas durações médias coincidem com as variâncias, e são as indicadas no enunciado, determine um compromisso temporal que seja respeitado com uma probabilidade de 95%. Comente o resultado obtido e o risco que o mesmo envolve (considere os dados utilizados no cálculo da alínea b).*

2. Considere uma variante da batalha dos sexos, em que o João e a Maria pretendem sair juntos, mas têm preferências diferentes. O João só encara as idas ao futebol (F) e ao cinema (C), enqunto a Maria, para além das duas anteriores, encara também o teatro (T). A bimatriz de utilidades do João e da Maria é a seguinte:

Maria

		F	T	C
João	F	(10; 5)	(5; 3)	(5; 4)
	C	(0; 0)	(0; 3)	(6; 10)

   a) ***(1,5 valores)*** *Diga de que jogo se trata e verifique se tem ponto (s) de equlíbrio em estratégias puras, indicando-o (s) caso exista (m);*

   b) ***(2,5 valores)*** *determine o ponto de equilíbrio em estratégias mistas. Comente (se tiver dificuldade em resolver com três estratégias para a Maria, retire a opção Teatro);*

   c) ***(1,0 valores)*** *Justifique de que maneira um equilíbrio de Nash difere da solução maximin de um jogo.*

3. O revendedor do artigo de um tipo de modelo I_Pad, designado XIPAD, cujo preço é igual a 800 €, abastece-se junto de um fornecedor que lhe vende cada unidade por 500 €.

a) ***(2,0 valores)*** *Cada encomenda que o revendedor faz ao fornecedor comporta um encargo fixo de 6000 €, sendo os artigos entregues uma semana depois de a encomenda ter sido efectuada. Por cada unidade XIPAD armazenada durante um mês o revendedor tem um custo de 20 € e estima em 80 € o custo associado ao diferimento de uma unidade durante o mesmo período. Supondo que são procuradas, por mês, 100 unidades do XIPAD, determine a política óptima a seguir pelo revendedor (assuma que um mês tem 30 dias e um ano 360 dias e 52 semanas);*

b) ***(2,5 valores)*** *Ao preparar o pedido da próxima encomenda, o revendedor foi informado que o fornecedor vai substituir o XIPAD por outra versão mais moderna. Nestas circunstâncias, o revendedor pensou fazer uma última encomenda deste artigo para um certo período de tempo até à introdução do novo modelo, sendo a procura neste período uma variável aleatória exponencial de média 500 unidades.*
Formalize e determine, justificando, a dimensão do lote a encomendar, sabendo que cada unidade não vendida acarreta um custo de armazenagem de 15 € e tem um valor residual de 150 € e que cada unidade de procura não satisfeita tem um custo de perda de imagem de 20 €. Indique a expressão geral, com os parâmetros dados, do ganho esperado (não calcule) individualizando as suas diversas componentes;

c) ***(1,0 valores)*** *explique a razão que leva a que nos modelos aleatórios sequenciais tenhamos, opcionalmente, modelos de ponto de encomenda e modelos de calendário, o que não acontece nos correspondentes modelos determinísticos, distinguindo uns dos outros e as consequências nos custos esperados.*

4. Uma empresa tem duas linhas de produção em funcionamento, A e B, e um Serviço de Manutenção com a responsabilidade de reparar as avarias que vão surgindo. O nº de avarias por dia na linha A é uma v. a. *poisson* com média 2; o nº de avarias por dia na linha B é também uma v. a. *poisson* de média 2,5. O tempo que demora a reparar cada avaria na linha A é uma v. a. uniforme entre 1 e 5 horas, enquanto o tempo de reparação na linha B é uma v. a. exponencial de média 2 horas.

a) ***(1,5 valores)*** *Gere temporalmente até à 5ª avaria (no total das duas máquinas) as ocorrências das avarias nas duas máquinas e os respectivos tempos de reparação (as linhas trabalham 24 horas por dia, em modo contínuo);*

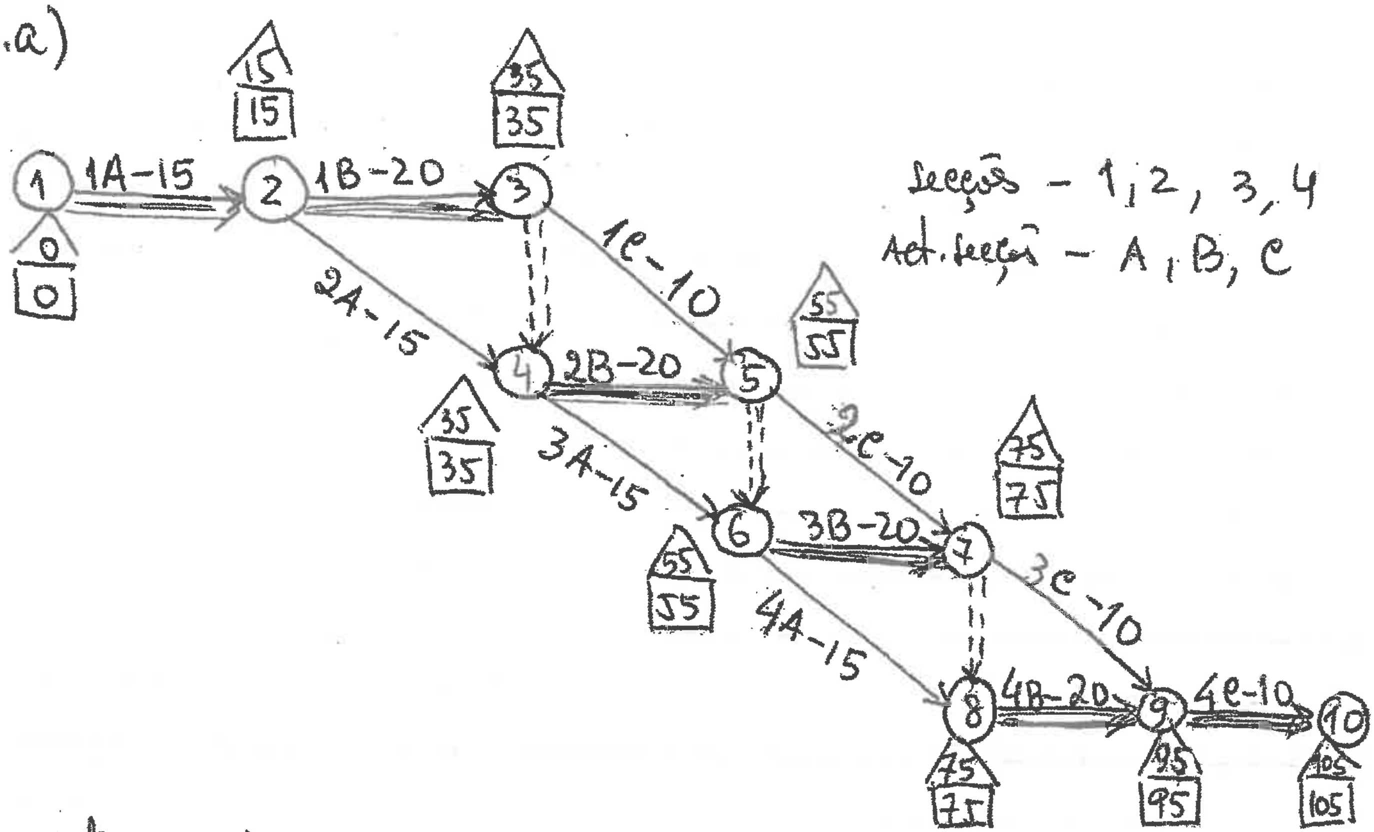
b) ***(2,5 valores)*** *(Simule o comportamento do sistema até que as primeiras 4 avarias estejam reparadas, indicando tempo de espera e tempo de reparação em cada linha, e tempo de inactividade do Serviço de Manutenção. O sistema começa com o serviço de manutenção desocupado.*

Obs.1. Considere os seguintes nºs p. a. entre 0 e 100: *Avarias Linha A: 63; 22; 71*
Tempo Reparação Linha A: 58; 83; 12; Avarias Linha B: 68; 32; 48
Tempo Reparação Linha B: 41; 38; 18

O Professor

IO2 – ER 2016 – Tópicos Resolução

1.a)



b)

Activ.	1A	1B	1C	2A	2B	2C	3A	3B	3C	4A	4B	4C
M.T.	0	0	10	5	0	10	5	0	10	5	0	0
M.L.	0	0	10	5	0	10	5	0	10	5	0	0

C. crítico = $\{1A; 1B; 2B; 3B; 4B; 4C\}$ Duração C.C = 105 dias

c) $T_{cc} \frown N(105; \sqrt{105})$

$P(T_{cc} \leq t_0) = 0{,}95 \implies t = 121{,}9 \simeq 122$ dias

Comentário: Dado que a probabilidade de não ultrapassar os 122 dias é $\leq 95\%$, a duração está subavaliada. No entanto, a probabilidade de qualquer outro caminho diferente durar mais de 122 dias é muito pequena, sendo o risco baixo.

2.a) Jogo de duas pessoas de soma não constante, finito e estático, de informação completa. Pode ter solução cooperativa ou não cooperativa

$(F;F) = (10;5)$ e $(C;C) = (6;10)$ são pontos de equilíbrio não cooperativo em estratégias puras. São equilíbrios de Nash. A solução final pode depender de quem escolhe primeiro num problema real. Os pontos indicados são equilíbrios não cooperativos (Nash)

b) Ganho Esperado da Maria (João escolhe F com probabilidade x, e C com prob. $(1-x)$)

Se Maria escolhe F : $5x$

Se Maria escolhe T : $3x + 3(1-x) = 3$

Se Maria escolhe C : $4x + 10(1-x) = 10 - 6x$

Para $x < 10/11$, Maria escolhe Cinema

Para $x > \frac{10}{11}$, Maria escolhe futebol

Para $x = \frac{10}{11}$, é indiferente

Estratégia da Maria: $(x, 1-x) = \left(\frac{10}{11}, \frac{1}{11}\right)$

Obs. Nunca escolhe teatro, pois o ganho (3) é sempre inferior aos restantes (elimina-se Teatro)

Ganho Esperado do João

Se João escolhe F : $10y + 5(1-y) = 5 + 5y$

Se João escolhe C : $6y$

$6y = 5 + 5y \Rightarrow y = 1/5$

Estratégia Maria : $(y, 1-y) = \left(1/5, 4/5\right)$

Em síntese: João escolhe Futebol com probabilidade $\frac{10}{11}$ e Cinema com probabilidade $\frac{1}{11}$

Maria escolhe Futebol com probabilidade $\frac{1}{5}$ e Cinema com probabilidade $\frac{4}{5}$

Comentário. Para além dos pontos de equilíbrio em estratégias puras o problema tem ponto de equilíbrio em estratégias mista. A utilidade esperada é diferente em todos os casos, quer a global quer a individual

Ponto	$(F,F)=(10;5)$	$(C,C)=(6,10)$	$(\frac{10}{11},\frac{1}{11});(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$
Ganho João	10	6	324/55=5,9
Ganho Maria	5	10	250/55=4,6
Total	15	16	574/55=10,5

e) O equilíbrio de Nash é um resultado no qual ambos os jogadores acreditam estar a fazer o melhor que podem, dadas as acções do outro adversário. Neste equilíbrio nenhum jogador possui incentivo para mudar de estratégia, a menos que haja uma mudança por parte do outro jogador.

Uma estratégia maxmin é aquela na qual cada jogador determina o pior resultado para ele, dada cada uma das possíveis acções dos seus oponentes, e então escolhe a opção que maximiza o ganho mínimo. Diferentemente do equilíbrio de Nash, a solução maximin não requer que os jogadores reajam à escolha de um adversário.

Obs. Quando o jogo é de 2 pessoas de soma nula (constante) e o maxmin = minimax para o oponente, o maxmin = = minimax é ponto de Nash.

Por exemplo, no exemplo dado, se João escolher a estratégia maximin escolhe Futebol:

$\min a_{1j} = \min(10; 5; 5) = 5$
$\min a_{2j} = \min(0; 0; 6) = 0 \Rightarrow \text{maximin } a_{ij} = \underline{\underline{5}}$

Dessa forma garante pelo menos 5.

Para a Maria escolher a estratégia maximin é escolher ~~max~~ $\min(5,0) = 0$; $\min(3,3) = 3$; $\min(4,10) = 4$

$\text{maximin } b_{ij} = 4$, isto é, Cinema.

Dessa forma garante pelo menos 4. O ponto $(F,C) = (5,4)$ não é ponto de Nash.

3. $C = 500$ $\qquad D = 100 * 12 = 1200$

a) $K = 6000$

$L = 1/52$

$IC = 20 \times 12 = 240$

$p = 80 \times 12 = 960$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 6000 * 1200}{240}} * \sqrt{\frac{960 + 240}{960}} \simeq 274$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2 * 6000 * 1200 * 240}{960(960 + 240)}} \simeq 55$$

$T = 0,228$ anos
$L = 0,019$ anos
$m = 0$

$r = 0,0192 * 1200 - 0 * 275 \simeq 23$

$$CT = 500 * 1200 + 6000 * \frac{1200}{274} + 240 * \frac{(274-55)^2}{2 * 274} + 960 * \frac{55^2}{2 * 274}$$

$\simeq 652581,4$

b) $$H(Q) = \frac{500 - 135}{800 + 20 - 135} = 0,533 \Rightarrow F(Q) = 0,467$$

$$F(Q) = 1 - e^{-\frac{Q}{500}} = 0,467 \Rightarrow Q \simeq 315$$

Formalização (3)

$$G(Q) = \begin{cases} 800x - 500Q + (150-15)(Q-x) & x < Q \\ 800Q - 500Q - 20(x-Q) & x \geq Q \end{cases}$$

Expressão do Ganho Esperado

$$E[G(315)] = \int_0^{315} \left[800x - 500*315 + 135(315-x)\right] \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} dx$$

$$+ \int_{315}^{\infty} \left[800*315 - 500*315 - 20(x-315)\right] \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} dx$$

$$= \underbrace{800*500}_{\text{Receita esperada}} - \underbrace{500*315}_{\text{C. Aquisição}} + \underbrace{135\left[315 - 500 + \int_{315}^{\infty} (x-315) \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} dx\right]}_{\text{Receita esperada dos saldos}}$$

$$- \underbrace{(20+800) \int_{315}^{\infty} (x-315) \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} dx}_{\text{“Custos” esperados ruptura}} = 35311$$

(não era pedido)

Obs. $\int_{315}^{\infty} (x-315) \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} dx \simeq 266$

b)

ER_2016 EX. 4

Nº avaria	Tempo	Estado	Linha A				Linha B				Prox. Acont	
	minutos	Serv. Man.	Estado	Próx. Av	Duraç. Av.	Fim Rep	Estado	Próx. Av	Duraç. Av.	Fim Rep	Tempo	Tipo
	0	V	Op	5,54			Op	3,70			3,70	AV B
1	3,70	O	Op	5,54			Man		1,78	5,49	5,49	Fim AV B
	5,49	V	Op	5,54			Op	16,42			5,54	AV A
2	5,54	O	Man		3,32	8,86	Op	16,42			8,86	Fim AV A
	8,86	V	Op	27,03			Op	16,42			16,42	AV B
3	16,42	O	Op	27,03			Man		1,94	18,36	18,36	Fim AV B
	18,36	V	Op	27,03			Op	25,40			25,40	AV B
4	25,40	O	Op	27,03			Man		3,43	28,83	27,03	AVA
5	27,03	O	ESP				Man			28,83	28,83	FimAVB
	28,83											

Int.AV-A	T. Rep.	Int.AV-B	T. Rep.
5,54	3,32	3,70	1,78
18,17	4,32	10,94	1,94
4,11	1,48	7,05	3,43

	Linha A	Linha B		
Tempo de espera	1,63	0		
Tempo reparação	3,32	7,15		
Tempo Inact. S. Man			18,36	67,9%

a)

		Tempo	Dur. AV	Fim Av.
1º Avaria	Linha B	3,70	1,78	5,49
2º Avaria	Linha A	5,54	3,32	8,86
3º Avaria	Linha B	16,42	1,94	18,36
4ª Avaria	Linha B	25,40	3,43	28,83
5ª Avaria	Linha A	27,03	4,32	